Exercice 1 : Etudier la nature des séries de t.g u_n

a/ $u_n = \frac{n+1}{n}$ $\quad v_n = n^2$ $\quad w_n = 2^n$

b/ $u_n = \frac{1}{2^n}$ $\quad v_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}$

c/ $u_n = \frac{1}{n+1}$; $v_n = \frac{n^2+n+1}{n^3+2}$; $w_n = \frac{n^2+1}{n^4+1}$, $T_n = \ln(1+\frac{1}{n})$

d/ $u_n = e^{-n}$; $v_n = e^{-\sqrt{n}}$; $w_n = e^{-n^3}$

f/ $u_n = \frac{1}{\ln n}$; $v_n = \frac{1}{(\ln n)^2}$; $w_n = \frac{\ln n}{n^3}$; $T_n = \frac{1}{n\sqrt{n}+\sin n}$

g/ $u_n = \frac{n+2}{n!}$ $\quad v_n = \frac{2.5.8\ldots(3n-1)}{1.5.9\ldots(4n-3)}$

h/ $u_n = \frac{1}{(\ln n)^n}$ $\quad v_n = \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}$

i/ $u_n = \sqrt[3]{n^3+an} - \sqrt{n^2+3}$ (suivant les valeurs de a)

j/ $u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ $\quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (suivant α et β)

Exercice 2 : Etudier la convergence puis calculer la somme des séries de t.g u_n

a/ $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ $\quad$ b/ $u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ $\quad$ c/ $u_n = \frac{2^n+4^n}{5^n}$

d/ $u_n = \frac{n^2+2}{n!}$ (Utiliser $e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$) $\quad$ e/ $u_n = \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$; $n \geq 2$

Exercice 3 : Montrer que la série de t.g u_n est une série alternée puis étudier sa convergence dans chacun des cas : a/ $u_n = (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}}$ $\quad$ b/ $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{1+t^2}\,dt$.

ETUDUP.com

Exercice 1

1/ Les 3 series ne verifient pas la condition necessaire de convergence : $\lim_{\infty} U_n \neq 0$ donc elles divergent ($\lim U_n \neq 0 \Rightarrow \sum U_n$ diverge)

2/ • $\sum U_n$ est une serie geometrique de raison $q = \frac{1}{2}$ avec $-1/2 < q < 1/2$ donc $\sum U_n$ c.v

• $\sum V_n = \sum \frac{1}{n^{3/2}}$ est 1 serie de Riemann convergente car $\alpha = 3/2 > 1$

3/ • $U_n \sim \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n}$ diverge $\Rightarrow \sum U_n$ diverge (equivalence)

• $0 < U_n < \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n}$ diverge $\Rightarrow \sum U_n$ diverge (comparaison)

• $V_n \sim \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n}$ diverge $\Rightarrow \sum U_n$ diverge

• $W_n \sim \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge ($\alpha = 2 > 1$) $\Rightarrow \sum W_n$ converge

• $T_n \sim \frac{1}{n}$ (Rappel $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ car $\lim_{0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$) $\Rightarrow \sum T_n$ converge

4/ • $\sum U_n = \sum \left(\frac{1}{e}\right)^n$ est une serie geometrique de raison $-1 < q = \frac{1}{e} < 1$ donc $\sum U_n$ converge

• Autre methode ; on a $\lim_{\infty} n^2 e^{-n} = 0$ et $\alpha = 2 > 1 \Rightarrow \sum e^{-n}$ converge

(En effet : $\exists n_0 > 0 \ / \ \forall n > n_0 : n^2 e^{-n} < 1$ car $e^{-n} < \frac{1}{n^2}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ c.v $\Rightarrow \sum e^{-n}$ c.v)

• De même : $\lim_{+\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}} = 0$ et $\alpha = 2 > 1 \Rightarrow \sum V_n$ c.v

• Aussi : $\lim_{+\infty} n^2 e^{-n^3} = 0$ et $\alpha = 2 > 1 \Rightarrow \sum W_n$ c.v

Rappel : $\lim_{X \to +\infty} X^{\alpha} e^{-X} = 0 \ ; \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

ETUDUP.com

Exercice 1 (suite)

*/ Rappel : $\forall x \in \mathbb{R}^{**}$: $\ln x \leq x$

. $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\ln n \leq n \Rightarrow 0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\ln n}$: $\sum \frac{1}{n}$ div $\Rightarrow \sum u_n$ div

$\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\ln n \leq n \Rightarrow \ln \sqrt{n} \leq \sqrt{n} \Rightarrow \frac{1}{4}(\ln n)^2 \leq n$

$\Rightarrow 0 < \frac{1}{n} \leq \frac{4}{(\ln n)^2}$: $\sum \frac{1}{n}$ div $\Rightarrow \sum v_n$ div

. $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\ln n \leq n \Rightarrow 0 < \frac{\ln n}{n^3} \leq \frac{1}{n^2}$: $\sum \frac{1}{n^2}$ c.v $\Rightarrow \sum w_n$ c.v

. Rappel : $\forall x \in \mathbb{R}$: $-1 \leq \sin x \leq 1$

$\forall n \in \mathbb{N}$: $-1 \leq \sin n \leq 1 \Rightarrow 0 < T_n \leq \frac{1}{n\sqrt{n}-1}$

$\frac{1}{n\sqrt{n}-1} \sim \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}$ et $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ c.v $(\alpha = 3/2 > 1) \Rightarrow \sum T_n$ c.v

f/ . $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+3}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n+2} = \frac{n+3}{(n+1)(n+2)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 < 1 \Rightarrow \sum u_n$ c.v

. $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2.5.8 \ldots (3n-1)(3n+2)}{1.5.9 \ldots (4n-3)(4n+1)} \cdot \frac{1.5.9 \ldots (4n-3)}{2.5.8 \ldots (3n-1)} = \frac{3n+2}{4n+1} \to \frac{3}{4} < 1 \Rightarrow \sum v_n$ c.v

h/. $\sqrt[n]{u_n} = u_n^{1/n} = \frac{1}{\ln n} \to 0 < 1 \Rightarrow \sum u_n$ c.v

. $\sqrt[n]{v_n} = v_n^{1/n} = \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{\frac{2n-1}{n}} \longrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} < 1 \Rightarrow \sum v_n$. c.v

---

i/ $u_n = n.\left(1+\frac{a}{n^2}\right)^{1/3} - n\left(1+\frac{3}{n^2}\right)^{1/2}$

$= n\left[1 + \frac{1}{3}.\frac{a}{n^2} + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}.\frac{a^2}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right] - n\left[1 + \frac{1}{2}.\frac{3}{n^2} + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}.\frac{9}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right]$

$= n\left(1 + \frac{a}{3n^2} - \frac{a^2}{9n^4} - 1 - \frac{3}{2n^2} + \frac{9}{8n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) = \frac{2a-9}{6a}.\frac{1}{n} + \frac{81-8a^2}{72}.\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

. Si $a \neq \frac{9}{2}$ alors $u_n \sim \frac{2a-9}{6a}.\frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n}$ div $\Rightarrow \sum u_n$ div

. Si $a = 9/2$ alors $u_n \sim -\frac{81}{72}.\frac{1}{n^3}$ et $\sum \frac{1}{n^3}$ c.v $\Rightarrow \sum u_n$ c.v

ETUDUP.com

j/ 1ère cas : $\alpha > 1$; $\forall \beta$

Considérons $1 < a < \alpha$; Alors $n^a U_n = \dfrac{1}{n^{\alpha-a}(\ln n)^\beta} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ $(\alpha - a > 0)$

donc $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \ \forall n > n_0 : \ U_n < \dfrac{1}{n^a}$

Or $a > 1$ et $\sum \dfrac{1}{n^a}$ c.v $\Rightarrow \sum U_n$ c.v

2°cas : $\alpha < 1$; $\forall \beta$

Considérons : $\alpha < a < 1$ Alors $n^a U_n = \dfrac{n^{a-\alpha}}{(\ln n)^\beta} \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty$ $(a - \alpha > 0)$

donc $\exists n_0 \in \mathbb{N} / \ \forall n > n_0 : \ U_n > \dfrac{1}{n^a}$

or $a < 1$ et $\sum \dfrac{1}{n^a}$ div $\Rightarrow \sum U_n$ div

3°cas $\alpha = 1$ Alors $U_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\beta}$, Considérons $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^\beta}$

f est définie, continue, positive, strictement décroissante sur $[2, +\infty[$

donc $\sum U_n$ et $\int_2^{+\infty} f(x)\,dx$ sont de même nature

En posant : $u = \ln x$ on obtient $\int_2^{+\infty} \dfrac{1}{x(\ln x)^\beta} dx = \int_{\ln 2}^{+\infty} \dfrac{1}{u^\beta} du = I$

Si $\beta > 1$; I converge donc de même $\sum U_n$

Si $\beta < 1$ I diverge donc de même $\sum U_n$

Si $\beta = 1$ I diverge ——— "

Exercice2 a/ $U_n \sim \dfrac{1}{n^2}$ et $\sum \dfrac{1}{n^2}$ c.v $\Rightarrow \sum U_n$ c.v

$U_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} = \dfrac{a(n+1)+bn}{n(n+1)} = \dfrac{(a+b)n+a}{n(n+1)} \Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a=+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=+1 \\ b=-1 \end{cases}$

d'où $U_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$

Ainsi $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n = \left(1 - \dfrac{1}{2}\right) + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3}\right) + \dots + \left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) = 1 - \dfrac{1}{n+1}$

$\lim\limits_{\infty} S_n = 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{+\infty} U_n = 1$

b/ De même $U_n \sim \dfrac{1}{n^3}$ et $\sum \dfrac{1}{n^3}$ c.v $\Rightarrow \sum U_n$ c.v

$U_n = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{n+2} \Rightarrow a = 1/2$, $b = -1$; $c = \dfrac{1}{2}$

Ainsi $S_n = U_1 + U_2 + \dots + U_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1/2}{n+1} - \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1/2}{n+2}$ et $\lim\limits_{\infty} S_n = \dfrac{1}{4}$ d'où $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} U_n = \dfrac{1}{4}$.

ETUDUP .com

(Suite de exercice proposés)

Exercice 2 : c/ $U_n = \frac{2^n+4^n}{5^n} = \left(\frac{2}{5}\right)^n + \left(\frac{4}{5}\right)^n$

les series de terme general : $q_1 = \frac{2}{5}$ et $q_2 = \frac{4}{5}$ sont convergente car $-1<q_1<1$ et $-1<q_2<1$ donc $\sum U_n$ c.v et $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{2}{5}} + \frac{1}{1-\frac{4}{5}} = \frac{20}{3}$

d/ $U_n = \frac{n^2+2}{n!}$; $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{(n+1)^2+2}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^2+2} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n^2+2)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0<1 \Rightarrow \sum U_n$ c.v

$S = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+2}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n-1)!} + 2\cdot\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$

$= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n-1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!}\right) + 2\cdot e = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} + 2e = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} + e + 2e$

$= e + e + 2e = 4e$

e/ $U_n = \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) \underset{\infty}{\sim} -\frac{1}{n^2}$; Or $\sum \frac{1}{n^2}$ c.v (serie de Riemann) $\Rightarrow \sum U_n$ c.v

$U_n = \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \ln\left(\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right) = \ln(n-1) - 2\ln n + \ln(n+1)$

$U_2 = \ln 1 - 2\ln 2 + \ln 3$
$U_3 = \ln 2 - 2\ln 3 + \ln 4$
$U_4 = \ln 3 - 2\ln 4 + \ln 5$
$\vdots$
$U_{n-1} = \ln(n-2) - 2\ln(n-1) + \ln(n)$
$U_n = \ln(n-1) - 2\ln n + \ln(n+1)$

Somme $\Rightarrow S_n = \sum_{n=0}^{n} U_n = -\ln 2 + \ln(n+1) - \ln n$

$S = \sum_{n=0}^{+\infty} U_n = \lim_{+\infty} S_n = \lim_{+\infty} -\ln 2 + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = -\ln 2$

Exercice 3 a/ $U_n = (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = (-1)^n v_n$ où $v_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \geq 0 \quad \forall n \geq 1$

donc (U_n) est une suite alternée

- Posons $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ alors $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x}{x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$

$\forall x \geq e^2$: $f'(x) > 0$ donc f est croissante donc (v_n) est croissante à partir de $n=7$

- $v_n = \frac{\ln n}{\sqrt{n}} = \frac{2\ln\sqrt{n}}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc (v_n) est une serie alterné c.v

b/ $U_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{1+t^2}\,dt$ On pose $x = t - n\pi$ càd $t = x + n\pi$

$U_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin(x+n\pi)}{1+(x+n\pi)^2}\,dt = (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+(x+n\pi)^2}\,dt = (-1)^n \cdot v_n$

- $\forall x \in [0,\pi]$: $\sin x \geq 0 \Rightarrow \frac{\sin x}{1+(x+n\pi)^2} \geq 0 \Rightarrow \int_0^{\pi} \frac{\sin x\,dx}{1+(x+n\pi)^2} \geq 0$; $v_n \geq 0$

- On a : $\forall x \in [0,\pi]$: $x + (n+1)\pi \geq x + n\pi \Rightarrow (x+(n+1)\pi)^2 \geq (x+n\pi)^2$

$\Rightarrow \frac{1}{(x+n\pi)^2} \geq \frac{1}{(x+(n+1)\pi)^2} \Rightarrow \frac{\sin x}{(x+n\pi)^2} \geq \frac{\sin x}{x+(n+1)\pi} \Rightarrow v_n > v_{n+1} \Rightarrow (v_n)\downarrow$

ETUDUP.com

• Rappel : $\left|\int f(x)\,dx\right| \leq \int |f(x)|\,dx$

$$|v_n| = \left|\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1+(x+n\pi)^2}\,dx\right| \leq \int_0^{\pi} \frac{|\sin x|}{1+(x+n\pi)^2}\,dx \leq \int_0^{\pi} \frac{1}{1+(x+n\pi)^2}\,dx \leq \int_0^{\pi} \frac{1}{n^2\pi^2}\,dx = \frac{1}{\pi n^2}$$

on a $\lim_{+\infty} \frac{1}{\pi n^2} = 0 \Rightarrow \lim_{\infty} v_n = 0$ donc (v_n) est une série alterné C.V

Programmation
Cours
Informatique
Optique
Chimie
Algébre
Electricité
Physique
Résumés
Corrigés
Mathématiques
Travaux Pratiques
Analyse
Diapo
Livres
Exercices
Mécanique
Contrôles Continus
Langues
MTU
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Droit
Chimie Organique

et encore plus..